УДК 517.958

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ [1)]

М.М. КАРЧЕВСКИЙ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail mkarchev@kpfu.ru

ON NONLINEAR SEEPAGE THEORY PROBLEM

M.M. KARCHEVSKY

Kazan Federal University

Аннотация

Дается обобщенная постановка задачи нелинейной теории фильтрации в неограниченной области. Доказана теорема существования решения. Предлагаются приближенные методы решения задачи, основанные на лагранжевом методе конечных элементов, а также на смешанном варианте метода конечных элементов типа Равьяра — Тома. Конструируются и исследуются итерационные методы решения соответствующих дискретных задач.

Ключевые слова: Нелинейная теория фильтрации, метод конечных элементов, смешанный метод конечных элементов, итерационный метод.

Summary

The generalized statement of a nonlinear seepage theory problem in unbounded domain is given. The existence theorem of solution is proved. The approximate methods based on Lagrange finite element method and mixed finite elements of Raviart—Thomas type are proposed. The iteration methods for the corresponds discrete problems are constructed and investigated.

Key words: Nonlinear seepage theory, finite element method, mixed finite element method, iterative method.

Введение

Рассматривается двумерная задача фильтрации жидкости, заполняющей все пространство. При этом предполагается, что в некоторой ограниченной области выполняется нелинейный закон фильтрации, допускающий наличие положительного предельного градиента сдвига, а вне этой области выполняется линейный закон фильтрации Дарси. Предлагается обобщенная постановка указанной задачи. Доказательство существования основано на методе точных нелокальных граничных условий [1] и методе монотонных операторов. Указано два подхода к построению приближенного решения задачи. Первый аналогичен описанному в [1] и основан на применении конформных лагранжевых конечных элементов, второй использует смешанную формулировку исходной задачи и конечные элементы Равьяра — Тома.

Описываются также итерационные методы решения соответствующих дискретных задач с конечноэлементным оператором Лапласа на верхнем слое.

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00955, 12-01-97022)

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с границей Γ класса C^1. Требуется найти функцию u удовлетворяющую квазилинейному уравнению второго порядка

$$-\mathrm{div}\, a(x, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

и являющейся гармонической функцией в области $\Omega_e = R^2 \setminus \bar{\Omega}$. На Γ предполагаются выполненным обычные условия сопряжения (по давлениям и потокам)

$$[u(x)] = 0, [q(x, \nabla u) \cdot \nu(x)] = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь и далее $q(x, \xi) = a(x, \xi), x \in \Omega$, $q(x, \xi) = \xi, x \in \Omega_e$, $\xi \in R^2$ ν — единичная нормаль к Γ, внешняя по отношению к Ω.

Будем предполагать, что функция $a(x, \xi)$ непрерывна при $x \in \Omega$, $\xi \in R^2$, существуют положительные постоянные c_0, c_1, c_2 такие, что

$$a(x, \xi) \cdot \xi \geqslant c_0 |\xi|^2 - c_1, \quad x \in \Omega, \xi \in R^2, \tag{3}$$

$$|a(x, \xi)| \leqslant c_2 (1 + |\xi|), \quad x \in \Omega, \xi \in R^2, \tag{4}$$

и, кроме того,

$$(a(x, \xi) - a(x, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \xi, \eta \in R^2. \tag{5}$$

Отметим, что условия (3)–(5) позволяют включить в рассмотрение нелинейные законы фильтрации с предельным градиентом сдвига и с линейным ростом на бесконечности (см. [2]). Будем считать также, что $f \in L_2(\Omega)$.

2. Нелокальные граничные условия. Обобщенная формулировка задачи

Пусть B — круг с центром в начале координат, включающий в себя область Ω, S — его граница. Не ограничивая общности, можно считать, что радиус круга B равен единице. Заметим, прежде всего, что, как хорошо известно, любая функция u, гармоническая во внешности B, может быть представлена в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(u) r^{-|k|} e^{ik\varphi}, \tag{6}$$

где r, φ — полярные координаты,

$$a_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(1, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi. \tag{7}$$

Используя теперь формулу интегрирования по частям, нетрудно получить, что для произвольной функции v, определенной на области B, выполнено равенство

$$\int\limits_B q(x, \nabla u) \cdot \nabla v dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k(u) a_k(v) = \int\limits_\Omega f v dx \tag{8}$$

Определение 1. *Функция $u \in H^1(B)$ называется обобщенным решением задачи* (1)–(2)*, если она удовлетворяет равенству* (8) *при любой функции $v \in H^1(B)$.*

Заметим, что если обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле данного определения существует, то значения функции u вне B могут быть найдены по формулам (6), (7).

3. Исследование обобщенной разрешимости задачи (1), (2)

Теорема 1. *При выполнении перечисленных выше условий задача* (1), (2) *имеет обобщенное тогда и только тогда, когда*
$$\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость условия (9) сразу же следует из того, что правая часть (8) обращается в нуль при любой функции $u \in H^1(\Omega)$, если $v \equiv 1$. Доказательство существования обобщенного решения задачи (1), (2) состоит в проверке условий теоремы 18.2 [3] для оператора $A : H^1(B) \to H^1(B)$, определяемого при помощи тождества

$$(Au, v)_{H^1(B)} = \int\limits_B q(x, \nabla u) \cdot \nabla v dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k(u) a_k(v) \quad \forall\, u, v \in H^1(B), \tag{10}$$

на подпространстве функций пространства $H^1(B)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_S u(x)dx = 0. \tag{11}$$

При этом существенную роль играет оценка второго слагаемого формы (10) на основе теоремы о следах в $H^{1/2}(S)$ (см., например, [4], теорема 8.15).

4. Конформный метод конечных элементов для задачи (1), (2)

Пусть $\mathcal{T}_h$ — конформная регулярная триангуляция области B с криволинейными приграничными элементами, V_h — соответствующее пространство лагранжевых конечных элементов (см., например, [5]). Под приближенным решением задачи (1), (2) понимается функция $u_h \in V_h$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_B q(x, \nabla u_h) \cdot \nabla v_h dx + \sum_{k=-N}^{N} k a_k(u_h) a_k(v_h) = \int\limits_{\Omega} f v_h dx \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{12}$$

Параметры h — максимальный диаметр конечного элемента триангуляции, N — целое число, характеризуют точность метода. Исследование разрешимости задачи (12) протекает по той же схеме, что и доказательство теоремы 1. Исследование сходимости приближенного решения и оценка его точности при условии, что неравенство (5) заменяется на неравенство сильной монотонности может быть выполнено вполне аналогично [1], с. 190.

5. Смешанный метод конечных элементов для задачи (1), (2)

Пусть P_k, $k \geqslant 0$, — пространство полиномов степени k по совокупности переменных x_1, x_2. Определим, следуя [6], конечноэлементные пространства

$$M_h = \{v_h \in L_2(B); v_h\big|_K \in P_k(K)\, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$N_h = \{q_h \in H_2(\mathrm{div}, B); q_h\big|_K \in RT_k(K)\, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Здесь $RT_k(K) = (P_k(K))^n \oplus P_k(k)x$, $x = (x_1, x_2)$ — пространство Равьяра — Тома, $H_2(\mathrm{div}, B) = \{q \in (L_2(B))^2, \mathrm{div}\, q \in L_2(B)\}$. Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $u_h \in M_h$, $j_h \in N_h$ таких, что

$$\int\limits_B q(x, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k(u_h) a_k(v_h) = \int\limits_{\Omega} f v_h dx \quad \forall\, v_h \in M_h, \tag{13}$$

.

$$\int\limits_B j_h(u_h)\cdot q_h dx + \int\limits_B u_h \mathrm{div}\, q_h dx = \int\limits_S u_h q_h \cdot \nu(x) dx \quad \forall\, q_h \in N_h. \tag{14}$$

Доказательство разрешимости задачи (13), (14) проводится с использованием леммы Брауэра. При этом существенную роль играют теорема 1.2 [7] о следах функций из пространства $H_2(\mathrm{div}, B)$ и дискретный аналог неравенства типа Ладыженской — Бабушки — Брецци

$$\sup_{q_h\in N_h} \frac{\int\limits_B v_h \mathrm{div} q_h dx}{\|q_h\|_{H_2(\mathrm{div},B)}} \geqslant c\|v_h\|_{L_2(B)} \quad \forall\, v_h \in M_h,$$

$c = \mathrm{const} > 0$ (см. [8]).

6. Итерационные методы решения дискретных задач

Для приближенного решения задачи (12) или (13), (14) предлагается использовать двуслойные итерационные методы вида

$$(E + B_h)\frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h = f_h, \tag{15}$$

где A_h — оператор, порождаемый тождествами (12) или (13), (14), оператор B_h — линейный оператор, получающийся из оператора A_h, если принять, что $q(x,\xi) = \xi, x \in B, \xi \in R^2$, E — единичный оператор в соответствующем конечноэлементном пространстве. Отметим, что в случае смешанной схемы конечных элементов на каждом шаге итерационного метода (15) требуется решать линейную систему уравнений с седловой матрицей.

Обоснование итерационных методов (15) в смысле сходимости по невязке при условии что выполнено неравенство подчинения

$$|a(x,\xi) - a(x,\eta)| \leqslant c_3((a(x,\xi) - a(x,\eta))\cdot(\xi-\eta))^{1/2} \quad \forall \xi,\eta \in R^2, \quad c_3 = \mathrm{const} > 0,$$

проводится аналогично [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Даутов Р.З., Карчевский Е.М.** Метод интегральных уравнений и точные нелокальные граничные условия в теории диэлектрических волноводов. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 271 с.
2. **Карчевский М.М., Ляшко А.Д.** О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Известия вузов. Математика – 1975. – № 6. – С .73–81.
3. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
4. **Kress R.** Linear integral equations. – Springer, 1999. – 365 p.
5. **Даутов Р.З., Карчевский М.М.** Введение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Казанский университет, 2011. – 240 с.
6. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Springer, 1991. – 365 p.
7. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. – М: Мир, 1981. – 408 с.
8. **Гогин А.П.** Оценки точности и итерационные процессы для смешанных методов конечных элементов решения квазилинейных эллиптических уравнений: дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук – Казань, 2014. – 108 с.

REFERENCES

1. **Dautov R.Z., Karchevskii E.M.** Integral Equations Method and Exact Boundary Condition in Theory of Dielectric Waveguides [Metod integral'nykh uravnenii i tochnye nelokal'nye granichnye uslovija v teorii dielektricheskikh volnovodov]. — Kazan: Kazanskii gosudarstvennyi Universitet, 2009. — 271 p. (in Russian)
2. **Lyashko A.D., Karchevskii M.M.** On the Solution of Some Nonlinear Problems of the Seepage Theory // Soviet Mathematics. — 1975. — V. 19, № 6. — P. 60–66.
3. **Vainberg M.M.** Variational Method and Monotone Operator Method in the Theory of Mon-linear Operators [Variatcionnyi metod i metod monotonnykh operatorov]. — Moscow: Nauka, 1972. (in Russian)
4. **Kress R.** Linear integral equations. — Springer, 1999. — 365 p.
5. **Dautov R.Z., Karchevsky M.M.** Introduction in Analysis of the Finite Element Method [Vvedenie v teoriju metoda konechnykh elementov]. — Kazan: Kazanskii gosudarstvennyi Universitet, 2011. — 240 p. (in Russian)
6. **Brezzi F., Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — Springer, 1991. — 365 p.
7. **Temam R.** Navier — Stokes Equations. Theory and numerical analysis. — North-Holland Publishing Company, 1977.
8. **Gogin A.P.** Error Estimation and Iterative Processes for a Mixed Finite Element Method Quasilinear Elliptic Equations Solution [Otcenki tochnosti i iteretcionnye protcessy dlja smeshannykh metodov konechykh elementov reshenija kvazilineinykh ellipticheskikh uravnenii]. — Thesis for the the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences. — Kazan, 2014. — 108 p. (in Russian)